

Задача № 122

Исходный опорный план составить методом северо-западного угла.

Найти оптимальный план перевозок, при котором транспортные издержки были бы минимальными.

Из трех пунктов отправления необходимо доставить однородный груз в четыре пункта назначения. Стоимость перевозки единицы груза, его запасы и потребности к ним указаны в табл. 2.

Таблица 2

Поставщики	Потребители				Запасы
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	6	11	4	10	30
A ₂	9	8	2	5	60
A ₃	12	7	1	3	10
Потребности	40	10	20	30	

Данная задача является задачей транспортного вида (так как суммарный объем производства a_i равен суммарному объему потребления b_j):

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

$$\sum a = 30 + 60 + 10 = 100$$

$$\sum b = 40 + 10 + 20 + 30 = 100$$

Целевая функция (суммарный пробег порожних вагонов) определяется по формуле:

$$F = f(x) = \sum_{i=1, j=1}^{3;4} c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min \square$$

где c_{ij} - расстояние перевозки от i -ой станции отправления до j -ой станции назначения; x_{ij} - величина перевозки из пункта отправления i -ой станции отправления до j -ой станции назначения.

Система ограничений

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} = a_i \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j \quad (j=1, 2, 3, 4)$$

$$x_{ij} \geq 0$$

где a_i - ресурсы i -ой станции отправления; b_j - потребность j -ой станции назначения.

Условие формирования закрытой транспортной задачи:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 10 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30 \end{cases}$$

Для решения задачи необходимо построить исходный опорный план перевозок, который в дальнейшем будет подвергаться корректировке.

Построим исходный план методом северо-западного угла.

План начинается заполняться с верхнего левого угла. Значение в клетке (1;1) равно $c_{11}=6$. Для этого элемента запасы равны 30, потребности 40. Поскольку минимальным является 30, то вычитаем его.

$$x_{11} = \min(30, 40) = 30.$$

Следующую клетку берем (2;1), значение $c_{21}=9$. Для этого элемента запасы равны 60, потребности 10. Поскольку минимальным является 10, то вычитаем его.

$$x_{21} = \min(60, 10) = 10.$$

И так далее получаем опорный план (таблица 3).

Таблица 3 Опорный план методом Северо-Западного угла

Поставщики	Наличие груза	Потребители			
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
		Потребление ресурсов			
		40	10	20	30
A ₁	30	6	11	4	10
A ₂	60	9	8	2	5
A ₃	10	12	7	1	3
		30	10	20	10

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность потребителей удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

Число занятых клеток таблицы:

$$m+n-1=6$$

Следовательно, опорный план является невырожденным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

$$F(x)=6 \cdot 30+9 \cdot 10+8 \cdot 10+2 \cdot 20+5 \cdot 20+3 \cdot 10=520$$

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы u_i, v_j по занятым клеткам таблицы, в которых $v_j - u_i = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.

$$v_1 - u_1 = 6; v_1 = 6$$

$$v_1 - u_2 = 9; u_2 = -3$$

$$v_2 - u_2 = 8; v_2 = 5$$

$$v_3 - u_2 = 2; v_3 = -1$$

$$v_4 - u_2 = 5; v_4 = 2$$

$$v_4 - u_3 = 3; u_3 = -1$$

	$v_1=6$	$v_2=5$	$v_3=-1$	$v_4=2$
--	---------	---------	----------	---------

$u_1=0$	6[30]	11	4	10
$u_2=-3$	9[10]	8[10]	2[20]	5[20]
$u_3=-1$	12	7	1	3[10]

Проверим оценки свободных клеток на соответствие условию $v_j - u_i < c_{ij}$:

$$(1; 2): 5 - 0 = 5 < 11$$

$$(1; 3): -1 - 0 = -1 < 4$$

$$(1; 4): 2 - 0 = 2 < 10$$

$$(3; 1): 6 - (-1) = 7 < 12$$

$$(3; 2): 5 - (-1) = 6 < 7$$

$$(3; 3): -1 - (-1) = 0 < 1$$

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию $v_j - u_i < c_{ij}$.

Ответ:

От 1-го поставщика необходимо весь груз направить к 1-у потребителю.

От 2-го поставщика необходимо груз направить к 1-у потребителю (10 ед.), к 2-у потребителю (10 ед.), к 3-у потребителю (20 ед.), к 4-у потребителю (20 ед.)

От 3-го поставщика необходимо весь груз направить к 4-у потребителю.

Минимальные затраты составят:

$$F(x) = 520 \text{ y.e.}$$